Lotka-Volterra :

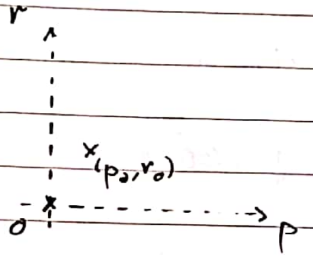
—: à écrire
[—]: à dire à l'oral
~: à savoir faire / remarque

[Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+^*$, on considère le système d'EDO

$$(E)\ \begin{cases} p' = ap - bpr \\ r' = -cr + dpr \end{cases}$$

On se donne $(p_0,r_0) \in \mathbb{R}_+^2$, on dessine le portrait de phase sur $\mathbb{R}_+^2$ de (E) pour une solution maximale de (E) valant (p_0,r_0) en t_0.

[Le cas $p_0 r_0 = 0$ est facile :
- si $p_0 = r_0 = 0$, le système ne bouge pas
- si $p_0 = 0$ et $r_0 > 0$: alors $p = 0$ et $r \xrightarrow[+\infty]{} 0$: pas de sardine donc les requins meurent.
- si $p_0 > 0$ et $r_0 = 0$: $r = 0$ et $p \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$
  ↳ pas de requins donc les sardines prolifèrent.]



Soit (p,r) solution maximale de (E) sur ~~inter~~ $I \subset \mathbb{R}$, passant par $(p_0,r_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ en t_0 : nous est donnée par Cauchy-Lipschitz.

Introduisons $\mathcal{H}(p,r) = dp + br - c\ln p - a\ln r$

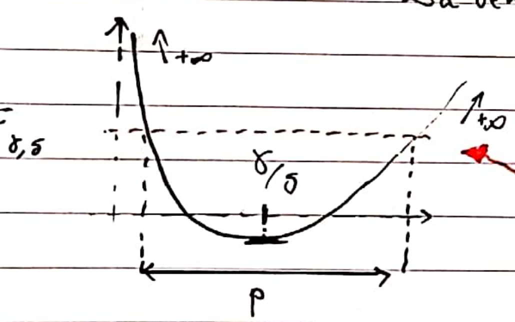
c'est une intégrale première → (à savoir montrer) → (savoir retrouver $\mathcal{H}$)

Donc $\mathcal{H}(p,r)(t) = \mathcal{H}(p_0,r_0) = C_0$

On pose $F_{\gamma,\delta} : u \mapsto \delta u - \gamma \ln(u)$, on remarque que $\mathcal{H}(x,y) = F_{a,b}(r) + F_{c,d}(p)$

La dérivée de $F_{\gamma,\delta}$ est $u \mapsto \delta - \gamma/u$, qui atteint une racine en γ/δ

On en déduit le graphe de $F_{\gamma,\delta}$.



L'intégrale première $\mathcal{H}(p,r) = F_{a,b}(r) + F_{c,d}(p) = C_0$ nous donne $F_{c,d}(p) \leq C_0 - F_{a,b}(a/b)$

$F_{c,d}(p)$ bornée donc par le graphe de $F_{c,d}$: p bornée.

De même : r bornée

(p,r) bornée donc, par le théorème des bouts : $I = \mathbb{R}$.

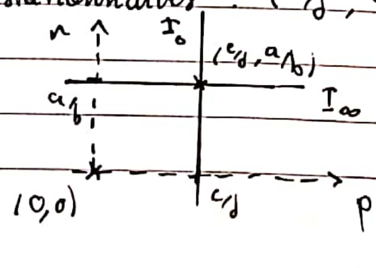
On résout

$\begin{cases} ap - bpr = 0 \text{ et } -cr + dpr = 0 \end{cases}$: on trouve $p(\frac{a}{b} - r) = 0$ et $(\frac{c}{d} - p)r = 0$

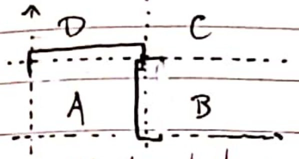
On en déduit les isoclines verticales et horizontales

$I_\infty = \{r = a/b\}$ et $I_0 = \{p = c/d\}$

et on trouve 2 points stationnaires : $(c/d, a/b)$ (intersection de I_∞ et de I_0), et $(0,0)$:



Découpons le quart du plan $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en 4 parties



$A = \{(p,r)\in\mathbb{R}^2 : 0<p\le \frac{c}{d},\ 0<r\le a/b\}$

$B = \{\text{———} : c/d \le p,\ 0<r<a/b\}$

$C = \{\text{———} : c/d < p,\ a/b \le r\}$

$D = \{\text{———} : 0<p\le c/d,\ a/b<r\}$

(évitez de dessiner une croix gammée devant le jury...)

Supposons que $(p_0,r_0)\in A$. Tant que (p,r) reste dans A, (E) nous donne $p'\ge 0$ et $r'\le 0$

Donc $p\nearrow$ et $r\searrow$

• Montrons que (p,r) atteint B : supposons par l'absurde que p n'atteint jamais c/d

Par majoration + croissance : p admet une limite dans $]0, c/d]$ quand $t\to+\infty$

r décroissante + minorée : r admet une limite dans $[0, r_0] \subset\ ]0, a/b[$

$(p(t),r(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (p^*,r^*)$ point stationnaire $\ne (0,0)$ ou $(c/d, a/b)$: impossible.

Donc p atteint c/d : $\exists t_1 > t_0$ $p(t_1) = c/d$

et $(p,r)(t_1)\in B$

• Tant que (p,r) reste dans B : $p'\ge 0$ et $r'\ge 0$

Si (p,r) ne quitte jamais B : p et r sont croissantes et bornées donc atteignent $(p^*,r^*)\in\bar{B}$, point stationnaire

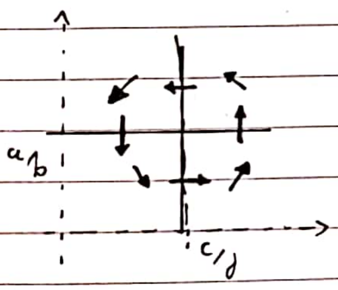
or $p^* > p(t_1) = c/d$ ⇝ savoir justifier $(p'(t_1)>0)$

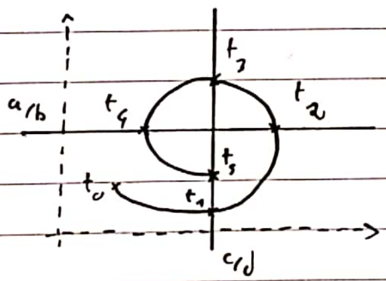
Donc $(p^*,r^*)\ne(c/d,a/b)$: contradic'

(p,r) quitte B en t_2 et $[p(t_2) > p(t_1)]$

donc $(p,r)(t_2)\in C$

De même : $[(p,r)$ atteint D en t_3 et A en t_4 et à nouveau B en $t_5]$





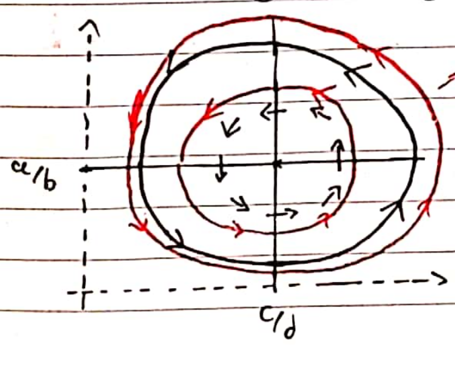
On obtient $0<t_1<t_5$ tels que $p(t_1)=p(t_5)$

$\mathcal{H} = F_{a,b}(r) + F_{c,d}(p)$ constante le long de (p,r)

D'où $F_{a,b}(r(t_1)) = F_{a,b}(r(t_5))$

Or $r(t_1)$ et $r(t_5)\in\ ]0, a/b]$: et $F_{a,b}$ est strictement $\searrow$ sur cet intervalle, donc injective.

On en tire $(p,r)(t_1) = (p,r)(t_5)$ puis (p,r) est (t_5-t_1)-périodique.



Leçons : 220, 229 et 267